Standardisierte Reifeprüfung in Mathematik
↔ IB Mathematics Analysis & Approaches SL

EINE GEGENÜBERSTELLUNG AM BEISPIEL KLOSTERNEUBURG INTERNATIONAL SCHOOL

ZUR VERWENDUNG FÜR DIE BERATUNGSGRUPPE MATHEMATIK

Mag. Valerie Schroll, Lehrerin an der Klosterneuburg Internation School

Am BG/BRG Klosterneuburg wird im Rahmen der *Klosterneuburg International School (KIS)* bilingualer Unterricht angeboten. Wenn sich die Schülerinnen und Schüler in der Oberstufe für das *International Baccelaureate Diploma Programme (IBDP)* entscheiden, schließen sie ihre Schullaufbahn sowohl mit der österreichischen Reifeprüfung als auch mit dem IB Diploma ab.

Im Folgenden werden einige Aspekte des Mathematik-Kurses im IBDP, wie Rahmenbedingungen, Lehrplan und Leistungsfeststellung, vorgestellt und mit dem österreichischen System verglichen.

Inhaltsverzeichnis

1. Das IBDP an der Klosterneuburg International School

Am BG/BRG Klosterneuburg wird seit 2003 ein bilinguales Programm mit Deutsch und Englisch als Arbeitssprache angeboten, beginnend mit der ersten Klasse Gymnasium. In der Unterstufe werden zwei Klassen pro Jahrgang in diesem System geführt, also ungefähr 50 Schülerinnen und Schüler. Der Unterricht in diesen Klassen entspricht der Stundentafel des Gymnasiums. Seit dem Schuljahr 2009/2010 können sich die Jugendlichen außerdem entscheiden, ob sie in der Oberstufe das IB Diploma Programme absolvieren wollen. Die ersten Prüfungen fanden 2013 statt. Es gibt auch die

Möglichkeit, in der Oberstufe das bilinguale Programm ohne IBDP fortzuführen; diese SchülerInnen besuchen dann aber eine eigene Klasse.

Durchschnittlich entscheiden sich ungefähr 21 Jugendliche für das IBDP. Sie bilden dann ab der fünften Klasse eine bilinguale Gymnasialklasse, in welcher der Unterricht ausschließlich auf Englisch abgehalten wird. Die Lehrpersonen unterrichten hauptsächlich nach dem österreichischen Lehrplan, versuchen aber auch die Schülerinnen und Schüler auf das IBDP gezielt vorzubereiten.

In der 7. und 8. Klasse wird dann das eigentliche Diploma Programme durchlaufen. Die Schülerinnen und Schüler wählen dafür sechs Fächer aus bestimmten Fachgruppen: Literatur, Fremdsprache, Sozialwissenschaft, Mathematik, Naturwissenschaft und Kunst. Für diese Fächer gibt es zusätzliche Einheiten verglichen mit dem regulären österreichischen Lehrplan. Je nachdem welche Fächer gewählt werden, kann es sich dabei um ein bis dreizehn zusätzliche Wochenstunden handeln.

Die Noten der einzelnen Fächer reichen von 1 bis 7, wobei eine 7 die beste Note ist. Die finale Note der Schülerin bzw. des Schülers ist die Summe der Noten aller Fächer inklusive zusätzlicher Punkte durch das Extended Essay, etc. Insgesamt können 45 Punkte erreicht werden. Das IB Diploma wird verliehen, wenn mindestens 24 Punkte sowie eine Mindestpunkteanzahl pro Fach erreicht wurden. Wer nur einzelne Fächer besteht, bekommt Zertifikate aber kein Diplom, und dadurch keine allgemeine Studienberechtigung. Um den Mathematikkurs zu bestehen, benötigt man beispielsweise mindestens 2 Punkte. Die Noten werden Anfang Juli bekanntgegeben.

In der untenstehenden Tabelle werden die Durchschnittsnoten in Mathematik an der KIS mit dem weltweiten Durchschnitt verglichen. Es ist zu erkennen, dass die Schülerinnen und Schüler an der KIS seit 2014 immer überdurchschnittlich gut abschneiden.

Prüfungstermin	Durchschnittsnote KIS	Durchschnittsnote weltweit
Mai 2013	4,17	4,46
Mai 2014	4,61	4,48
Mai 2015	5,57	4,44
Mai 2016	4,67	4,39
Mai 2017	4,92	4,37
Mai 2018	4,78	4,26
Mai 2019	5,27	4,18
Mai 2020	4,67	4,24

Tabelle 1 - Durchschnittnoten in Mathematik: KIS und weltweit

In Mathematik gibt es allgemein zwei verschiedene Kurse, die im IBDP angeboten werden können: „Application & Interpretation“ sowie „Analysis & Approaches“. Diese beiden Kurse werden jeweils in zwei verschiedenen Schwierigkeitsgraden als „Standard Level“ und „Higher Level“ angeboten. In Klosterneuburg wird nur der Kurs *„Mathematics Analysis & Approaches Standard Level“ (Math-AA)* angeboten, weil dieser inhaltlich am besten zum österreichischen Lehrplan und der *standardisierten Reifeprüfung in Mathematik (SRP-M)* passt.

Am Ende des letzten Schuljahres schreiben die Schülerinnen und Schüler in den gewählten sechs Fächern zentrale, schriftliche Abschlussprüfungen. Nachdem diese Prüfungstermine meist mit dem Haupttermin der österreichischen Reifeprüfung kollidieren, wird in der KIS eine vorgezogene schriftliche Reifeprüfung durchgeführt. Das bedeutet, dass die Kandidatinnen und Kandidaten bereits im Jänner zur SRP in Mathematik und Deutsch antreten. Bei den Prüfungen handelt es sich um den zweiten Nebentermin des vorherigen Schuljahres. Die schriftliche IB Prüfung in Englisch wird ihnen für die SRP anerkannt. Die mündlichen Reifeprüfungen finden regulär im Juni statt; meistens treten die Schülerinnen und Schüler hier in ihren gewählten IB Fächern an, um ihren Lernaufwand zu optimieren.

Die Vorwissenschaftliche Arbeit können die Jugendlichen mit dem Extended Essay aus dem IBDP verbinden. Auch dort müssen sie eine Arbeit mit Forschungsfrage nach akademischen Standards schreiben, die vom Ausmaß her mit der VWA vergleichbar ist. Zumal die VWA auch in Englisch verfasst werden darf, hält sich hier der zusätzliche Aufwand in Grenzen.

Weil bereits im Jänner maturiert wird, müssen die Jahresnoten für Mathematik und Deutsch schon im Dezember beschlossen werden. Anfang Dezember müssen also schon alle Lerninhalte durchgenommen und Schularbeiten geschrieben sein. Damit bis dahin die Klasse ausreichend auf die Reifeprüfung vorbereitet werden kann, hat die achte Klasse bis Weihnachten je vier Wochenstunden in Mathematik und Deutsch. Ab Jänner, wenn nur noch auf die IB Prüfung vorbereitet wird, sind es jeweils nur noch zwei Wochenstunden.

In der folgenden Tabelle werden die allgemeinen Rahmenbedingungen des Mathematikunterrichts in einer regulären Oberstufe mit jenen an der Klosterneuburg International School verglichen:

Mathematikunterricht	**reguläre Oberstufe**	**KIS**
Dauer	4 Jahre	2 Jahre „Pre-IB“, 2 Jahre „IB“
Abschlussprüfung	SRP-M im Mai	SRP-M im Jänner Math-AA im Mai
Wochenstunden 5. Klasse	3 (Realgymnasium: 4)	3
Wochenstunden 6. Klasse	3 (Realgymnasium: 4)	4
Wochenstunden 7. Klasse	3	4
Wochenstunden 8. Klasse	3	4 bis Dezember, 2 ab Jänner

Schularbeiten pro Jahr	5.-7. Klasse: 3-5 SAs 8. Klasse: 2-3 SAs	5.-7. Klasse: 3 SAs + 3 IB-Tests 8. Klasse: 2 SAs (vor Weihnachten) + 1 IB-Test (im 2. Semester)
Kosten	abhängig vom Schulstandort	*Monatlicher Beitrag:* 45 € *Prüfungsgebühren:* 118 € + 62 € pro Fach *Taschenrechner:* ca. 115 € *Schulbuch:* im Rahmen der Schulbuchaktion
Technik	GeoGebra bzw. Taschenrechner mit CAS	TI-Nspire CX II-T CAS (CAS muss deaktivierbar sein)

Tabelle 2 - Vergleich der allgemeinen Rahmenbedingungen des Mathematikunterrichts (Gymnasium Klosterneuburg, 2020)

Um die zwei unterschiedlichen Prüfungsformate ausreichend zu trainieren, werden in allen Jahrgängen sowohl klassische österreichische Schularbeiten wie auch sogenannte „IB-Tests“ zu den jeweiligen Lerninhalten geschrieben. Die IB-Tests haben einen vergleichbaren Umfang zu den Schularbeiten, zählen aber nicht so stark zur österreichischen Jahresnote. In der achten Klasse finden bis Dezember nur die zwei österreichischen Schularbeiten statt. Nach der SRP-M wird ausschließlich für die Math-AA-Abschlussprüfung gelernt. In diesem Rahmen findet auch eine Probeprüfung statt, die denselben Umfang hat wie die tatsächliche Prüfung im Mai.

Nach einem groben ersten Überblick über das IBDP an der KIS beleuchten die anschließenden Kapitel den Mathematikunterricht näher.

2. Lehrplan

An der Klosterneuburg International School müssen die Schülerinnen und Schüler den Kurs „*Mathematics Analysis & Approaches Standard Level*“ besuchen, weil dieser bezüglich Inhalt und Schwierigkeitsgrad am besten zum österreichischen Lehrplan für Oberstufen passt. Das Curriculum des Math-AA wird grob in fünf Themenbereiche gegliedert (International Baccelaureate Organisation, 2019):

1. Zahlen und Algebra
2. Funktionen
3. Geometrie und Trigonometrie
4. Statistik und Wahrscheinlichkeit
5. Analysis

Im Anhang ist eine detaillierte Auflistung des Syllabus beigefügt. Doch bereits anhand der Grobeingliederung lässt sich erkennen, dass die Lerninhalte den Grundkompetenzen der SRP-M ähneln könnten. Natürlich unterscheiden sich die beiden Lehrpläne aber in einigen kleinen Punkten. Konkret fehlen für die SRP-M folgende Grundkompetenzen, beziehungsweise Teile davon:

AG 3	Vektoren
FA 1.8	Funktionen mit mehreren Veränderlichen
AN 1.1	Änderungsmaße
AN 1.4	Differenzengleichungen
AN 4.1	Obersumme und Untersumme
AN 4.3	Rotation
WS 4.1	Konfidenzintervall

Tabelle 3 - fehlende Grundkompetenzen der SRP-M im Math-AA

Genauso werden auch im Math-AA einige Themen behandelt bzw. genauer betrachtet, die in der SRP-M nicht geprüft werden. In der untenstehenden Tabelle werden diese Lerninhalte ausgeführt:

Lerninhalt	AUT Lehrplan, aber nicht SRP-M
Folgen & Reihen • arithmetisch & geometrisch • Summen von Reihen • Anwendungen (z.B.: Finanzmathematik)	✓
Reelle Funktionen • Umkehrfunktionen • Verknüpfung von Funktionen • Selbstinverse Funktionen • Asymptoten von gebrochen rationalen Funktionen berechnen	✓
Transformationen von Graphen • Translation • Dilation • Reflexion • Verknüpfungen von Transformationen	Teilweise, aber nicht in diesem Ausmaß
Quadratische Gleichungen und Funktionen • Scheitelform • Ergänzen auf ein vollständiges Quadrat	✓
Geometrie • Volumen und Oberflächeninhalt von dreidimensionalen Körpern • Fläche eines Kreissektors • Länge eines Kreisbogens	Unterstufe

Trigonometrie • Exakte Werte von Sinus, Cosinus und Tangens von $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \ldots$ • Sinussatz • Cosinussatz • Zweideutigkeit des Sinussatzes (Kongruenzsatz) • Trigonometrische Flächenformel • Peilung (zur Navigation) • Tangensfunktion • Doppelwinkelfunktionen • Trigonometrische Gleichungen lösen	Teilweise, aber nicht in diesem Ausmaß
Lineare Regression • Pearsons Korrelationskoeffizient berechnen, vergleichen & deuten • Regressionsgerade aufstellen und deuten (x auf y & y auf x) • Interpolation & Extrapolation interpretieren	nicht im AUT-Lehrplan
Analysis • Umfangreichere Arbeit mit Kinematik • Substitution	✓

Tabelle 4 – Inhalte im Math-AA, die nicht in der SRP-AA geprüft werden

Auf den ersten Blick erscheint es, dass die meisten dieser Math-AA-Themen ohnehin auch in der regulären AHS Oberstufe behandelt werden (sollten). Diese müssen im regulären Unterricht aber oft komprimiert oder weggelassen werden, damit die Grundkompetenzen gefestigt werden. Im Math-AA-Kurs werden die aufgelisteten Lerninhalte außerdem meist viel genauer und umfangreicher durchgenommen als es der österreichische Lehrplan verlangt.

Zum Beispiel steht im österreichischen Lehrplan (Stand Juli 2020) in der 6. Klasse im Kompetenzmodul 3 unter Reelle Funktionen: „Verkettungen von Funktionen kennen; Umkehrfunktionen kennen". Für das Math-AA müssen die Kandidatinnen und Kandidaten jedoch auch diese Funktionen berechnen können, Zusammenhänge kennen und in kleinen Beweisen verwenden. Die Jugendlichen müssen also oft tiefer in die Materie eintauchen als reguläre Schülerinnen und Schüler.

Schließlich muss auch berücksichtigt werden, dass ein Teil der schriftlichen Math-AA-Prüfung ohne Technologie geschrieben wird. Außerdem muss ein Taschenrechner ohne CAS verwendet werden. Dadurch muss ganz anders unterrichtet werden als in einer regulären Klasse. Das technische Arbeiten mit Zahlen und Termen hat dadurch deutlich mehr Bedeutung als in der SRP-M und muss anders und mehr trainiert werden. Das bezieht sich nicht nur auf das reine Lösen von Gleichungen, sondern auch auf das Umformen von (Funktions-)Gleichungen, Differenzieren, Integrieren, und vieles mehr. Von diesen Kompetenzen profitieren die Schülerinnen und Schüler der KIS schließlich auch bei der SRP-M.

3. Leistungsfeststellung

Das IB Diploma Programme unterscheidet sich in seinen Abschlussprüfungen ganz grundlegend von der standardisierten Reifeprüfung in Österreich. Das beginnt damit, dass die Kandidatinnen und Kandidaten in allen sechs gewählten Fächern sowohl eine schriftliche Klausur schreiben als auch eine längerfristig bearbeitete Leistung erbringen müssen. Die Klausur wird wie die SRP-M zentral erstellt, jedoch auch extern beurteilt. Der längerfristige Arbeitsprozess wird von der eigenen Lehrkraft beurteilt. Umfang und Form dieser internen Leistungsfeststellung unterscheiden sich von Fach zu Fach. Je nach Gewichtung dieser einzelnen Prüfungsteile setzt sich dann die Abschlussnote zusammen. Im Math-AA sieht die Zusammensetzung der Leistungsfeststellung wie folgt aus (International Baccelaureate Organisation, 2019):

Prüfungstyp	Prüfungsformat	Zeit	Gewichtung
Externe Leistungsfeststellung			
Schriftliche Prüfung 1	*Ohne Technologie* Teil A: Kurzantwort-Fragestellung Teil B: ausführliche Fragestellung	90 min	40%
Schriftliche Prüfung 2	*Mit Technologie (aber ohne CAS)* Teil A: Kurzantwort-Fragestellung Teil B: ausführliche Fragestellung	90 min	40 %
Interne Leistungsfeststellung			
Exploration	Ausführliche Ausarbeitung einer mathematischen Fragestellung		20 %

Tabelle 5 - Zusammensetzung der Abschlussprüfung im Math-AA

Man erkennt, dass die Note hauptsächlich von der schriftlichen Klausur (80%) abhängt. Doch schlussendlich kann die Qualität der Exploration zwischen zwei Noten entscheiden.

Das IBO nennt gewisse mathematische Kompetenzen und Konzepte, welche die Kandidatinnen und Kandidaten am Ende des Math-AA in unterschiedlichen Situationen anwenden sollen. Diese Fähigkeiten und Fertigkeiten sollen in den externen und internen Leistungsfeststellung demonstriert werden. In der untenstehenden Tabelle sind diese Ziele aufgelistet und nach Bedeutung in den Prüfungsteilen gewichtet (International Baccelaureate Organisation, 2019).

Ziele	Schriftliche Prüfung 1	Schriftliche Prüfung 2	Exploration
Wissen und Verstehen	20-30 %	15-25 %	5-15 %
Problemlösen	20-30 %	15-25 %	5-20 %
Kommunizieren und Interpretieren	20-30 %	15-25 %	15-25 %

Technologieeinsatz	0 %	25-35 %	10-20 %
Argumentieren	5-15 %	5-10 %	5-25 %
Untersuchen und Hinterfragen	10-20 %	5-10 %	25-35 %

Tabelle 6 - Ziele der Math-AA-Prüfungen

Bei der Exploration ist hier weitaus mehr Spielraum für die Schwerpunktsetzung der Kompetenzen, weil die Aufgabenstellung auch sehr offen ist. Somit können die Schülerinnen und Schüler individuell entscheiden, worauf sie den Fokus legen wollen.

Externe Leistungsfeststellung

Die beiden schriftlichen Prüfungen werden meistens an einem oder an zwei aufeinander folgenden Tagen geschrieben. Wegen der weltweit unterschiedlichen Zeitzonen gibt es pro Prüfungstermin zwei verschiedene Prüfungsversionen. Österreich befindet sich in der Zeitzone 2 und schreibt damit gleichzeitig mit allen IBDP-Schulen in Europa, Afrika, Mittleren Osten und Asien.

Die Prüfungen werden von der IBO zentral erstellt und auch extern von zertifizierten „IB Examinors“ korrigiert und beurteilt. Dafür gibt es eine detaillierte Aufschlüsselung, wofür Punkte gegeben werden dürfen und wofür nicht. Pro Prüfung können 80 Punkte erreicht werden.

Alle Aufgaben sind in Teilaufgaben gegliedert und meistens mehrere Punkte wert. Die Punkte werden in verschiedene Kategorien gegliedert. Zum Beispiel gibt es Punkte für eine passende Methode, eine richtige Lösung oder eine korrekte Argumentation. Weil das IBO großen Wert auf die Dokumentation des Arbeitsprozesses legt, gibt es meistens nicht die volle Punktezahl, wenn man nicht alle Schritte anschreibt. Für Folgefehler gibt es nur dann Punkte, wenn alle Arbeitsschritte gezeigt wurden, und wenn die Rechnung dadurch nicht wesentlich vereinfacht wurde.

Da die Prüfung 1 ohne Taschenrechner geschrieben wird, erfordern die Fragestellungen in diesem Teil eher analytische Lösungswege. Hier werden keine komplizierten Berechnungen mit Potential auf Flüchtigkeitsfehler erwartet, aber Kandidatinnen und Kandidaten sollten sattelfest in der Arithmetik sein. Bei der Prüfung 2 sind dann teilweise komplexere Rechenschritte gefragt, die den Taschenrechner verlangen. Jedoch wird nicht in jeder Aufgabe der zweiten Prüfung Technologieeinsatz gebraucht.

Für beide Prüfungen wird der gesamte Stoff des Math-AA vorausgesetzt, wobei nicht unbedingt alle Themen geprüft werden. Beide Prüfungen sind in Teil A und Teil B gegliedert, wobei die zwei Teile jeweils ungefähr gleich viele Punkte wert sind. Im Teil A werden eher kurze, offene Fragen gestellt, die nur wenige Arbeitsschritte verlangen. Die Fragen im Teil B sind meistens umfangreicher und erfordern ausführlichere Antworten. Der Schwerpunkt liegt hier auf der Argumentationsfähigkeit der Schülerinnen und Schüler. Immer wieder müssen sie bestimmte Zusammenhänge zeigen oder beweisen. Oft prüft eine Aufgabe mehrere Themengebiete und Kompetenzen ab. Dabei wird der Schwierigkeitsgrad innerhalb einer Aufgabe häufig von Teilpunkt zu Teilpunkt erhöht.

Für alle Prüfungsteile ist die vom IBO erstellte Formelsammlung erlaubt.

Anschließend ist eine Aufgabe aus einer Beispielprüfung des IBO abgebildet. Sie stammt aus dem Teil B in der zweiten schriftlichen Prüfung. In der Aufgabe 8 werden Kompetenzen betreffend Normalverteilung, Binomialverteilung und bedingter Wahrscheinlichkeit abgeprüft.

8. [Maximum mark: 15]

The length, $X\,\mathrm{mm}$, of a certain species of seashell is normally distributed with mean 25 and variance, σ^2.

The probability that X is less than 24.15 is 0.1446.

(a) Find $\mathrm{P}(24.15 < X < 25)$. [2]

(b) (i) Find σ, the standard deviation of X.

(ii) Hence, find the probability that a seashell selected at random has a length greater than $26\,\mathrm{mm}$. [5]

A random sample of 10 seashells is collected on a beach. Let Y represent the number of seashells with lengths greater than $26\,\mathrm{mm}$.

(c) Find $\mathrm{E}(Y)$. [3]

(d) Find the probability that exactly three of these seashells have a length greater than $26\,\mathrm{mm}$. [2]

A seashell selected at random has a length less than $26\,\mathrm{mm}$.

(e) Find the probability that its length is between $24.15\,\mathrm{mm}$ and $25\,\mathrm{mm}$. [3]

Abbildung 1 - Aufgabe aus Beispielprüfung, Schriftliche Prüfung 2 - Teil B (International Baccelaureate Organisation, 2019)

Inhaltlich unterscheidet sich die Aufgabe zu jenen, die bei der SRP-M vorkommen könnten, dahingehend, dass die Standardisierung der Normalverteilung verlangt wird. Dies wird gewöhnlich bei der SRP-M nicht geprüft. Auch die Verwendung der bedingten Wahrscheinlichkeit kommt in dieser Form bei der SRP-M nicht vor.

Anders als bei der SRP-M ist diese Aufgabe sehr aufbauend gestaltet. Wenn jemand zum Beispiel die Lösung von (b) nicht findet, kann er die darauffolgenden Aufgaben nicht bearbeiten. Jedoch werden Folgefehler unter bestimmten Bedingungen berücksichtigt. Bei einigen Aufgaben wird die Problematik der Folgefehler so umgangen, dass das Ergebnis schon in der Fragestellung gegeben ist. Dann sollen die Schülerinnen und Schüler zeigen, dass dieses Ergebnis stimmt.

Im Fall dieser Aufgabe 8 wäre bei (b)(ii) stattdessen verlangt: „Zeige, dass $\sigma = 0.802$“ Dadurch könnten die Kandidatinnen und Kandidaten auch die restlichen Teilaufgaben lösen, ohne (b) geschafft zu haben.

In der untenstehenden Abbildung sind die Lösungen der Aufgabe 8 zu finden. Hier wird auch das Punkteschema genau aufgeschlüsselt. „M1“ bedeutet, dass 1 Punkt für eine passende Methode zu vergeben ist und „A1“ ist 1 Punkt für die korrekte Antwort.

8.	(a)	attempt to use the symmetry of the normal curve	***(M1)***	
		eg diagram, $0.5-0.1446$		
		$\mathrm{P}(24.15 < X < 25) = 0.3554$	***A1***	
				[2 marks]
	(b)	(i) use of inverse normal to find z score	***(M1)***	
		$z = -1.0598$		
		correct substitution $\dfrac{24.15-25}{\sigma} = -1.0598$	***(A1)***	
		$\sigma = 0.802$	***A1***	
		(ii) $\mathrm{P}(X > 26) = 0.106$	***(M1)A1***	
				[5 marks]
	(c)	recognizing binomial probability	***(M1)***	
		$\mathrm{E}(Y) = 10 \times 0.10621$	***(A1)***	
		$= 1.06$	***A1***	
				[3 marks]
	(d)	$\mathrm{P}(Y = 3)$	***(M1)***	
		$= 0.0655$	***A1***	
				[2 marks]
	(e)	recognizing conditional probability	***(M1)***	
		correct substitution	***A1***	
		$\dfrac{0.3554}{1-0.10621}$		
		$= 0.398$	***A1***	
				[3 marks]
				Total [15 marks]

Abbildung 2 - Lösungen und Punkteschema für Aufgabe aus Beispielprüfung, Schriftliche Prüfung 2 - Teil B (International Baccelaureate Organisation, 2019)

Hier liegt der große Unterschied zur SRP-M darin, dass für eine Aufgabe meistens mehr als ein Punkt vergeben wird. Punkte werden nicht nur für die finale Lösung gegeben, sondern auch für den Lösungsansatz sowie für Zwischenergebnisse. Dadurch werden die Kandidatinnen und Kandidaten eher dazu ermutigt, ihren Lösungsprozess anschaulich und nachvollziehbar zu dokumentieren.

Interne Leistungsfeststellung

Bei Exploration handelt es sich um eine schriftliche Arbeit, in der die Kandidatinnen und Kandidaten eine mathematische Fragestellung ihrer Wahl bearbeiten. Dabei können sie zum Beispiel erlernte Mathematik anwenden, einen Sachverhalt modellieren oder mathematische Zusammenhänge hinterfragen. Hier bleibt die Wahl ihres Themas und ihrer Methoden ganz ihnen überlassen, jedoch soll die Arbeit so geschrieben werden, dass die Mitschülerinnen und Mitschüler sie nachvollziehen und verstehen können.

Die Exploration soll Schülerinnen und Schüler dazu ermutigen, ihre Kompetenzen und ihr Wissen zu demonstrieren. Hier können sie ihre eigenen Interessen verfolgen und eigene Fragen stellen – ohne Zeitdruck oder andere Beschränkungen, die mit schriftlichen Prüfungssituationen zusammenhängen. Durch die Gelegenheit, über einen längeren Zeitraum an einem mathematischen Prozess zu arbeiten, sollen sie die vielseitigen Möglichkeiten und Anwendungsgebiete der Mathematik erkennen.

Beispiele für Themen einer Exploration sind unter anderem:

- „Zeigt mein Spiegel ein akkurates Bild?“
- „Zahlungsoptionen für den Hauskauf“
- „Das Volumen eines Hühnereis“
- “Was ist *e*?”

Die Arbeit soll ungefähr 12 bis 20 Seiten umfassen, wobei die Qualität des Inhalts und der Mathematik wichtiger ist als die Länge. Der Schwerpunkt liegt hier auf einem niveauvollen Umgang mit Mathematik inklusive einer vielfältigen Kommunikation durch Text, Formeln, Diagrammen, Graphen, Tabellen, etc.

Insgesamt können höchstens 20 Punkte erreicht werden, dabei wird die Beurteilung in fünf Kriterien gegliedert (International Baccelaureate Organisation, 2019):

A. *Präsentation* ➢ Kohärente, gut strukturierte und präzise Arbeit ➢ Nachvollziehbare Kommentierung der Arbeitsschritte	max. 4 Punkte
B. *Mathematische Kommunikation* ➢ Angebrachte, relevante und konsistente mathematische Kommunikation ➢ Vielfältige mathematische Repräsentation	max. 4 Punkte
C. *Persönliches Engagement* ➢ Authentische, kreative und qualitativ hochwertige Auseinandersetzung mit dem Thema	max. 3 Punkte

D. Reflexion ➢ Ständiges, tiefgründiges Reflektieren der Arbeitsschritte und Ergebnisse	max. 3 Punkte
E. Anwendung von Mathematik ➢ Angemessene, niveauvolle und korrekte Mathematik ➢ Demonstration von umfassendem Wissen und Verständnis	max. 6 Punkte

Tabelle 7 - Beurteilungskriterien der Exploration

Die Leistung wird von der eigenen Lehrperson beurteilt, aber vom IBO moderiert. Das bedeutet, dass eine Stichprobe der Explorationen an einen zertifizierten „IB Moderator" geschickt und von diesem beurteilt werden. Danach werden Notenvorschläge der Lehrkraft und des Moderators miteinander verglichen und dementsprechend werden auch die anderen Noten in der Klasse angepasst.

Die Lehrperson muss die Schülerinnen und Schüler während des gesamten Prozesses begleiten und beraten. Der Betreuungsprozess verläuft dabei ähnlich zur Betreuung einer VWA. An der KIS beginnen die Schülerinnen und Schüler im zweiten Semester der 7. Klasse mit der Themenfindung. Bis zum Schulschluss sollte dann eine konkrete Fragestellung sowie ein Grundkonzept für die Arbeit stehen, damit über den Sommer geschrieben werden kann.

Zu Beginn der achten Klassen bekommen die Schülerinnen und Schüler dann ein ausführliches Feedback zu ihrer Rohfassung. Danach dürfen sie die Exploration noch zweimal überarbeiten, bevor sie vor Weihnachten die finale Version abgeben. Nach Möglichkeit wird auch versucht, gegenseitiges Feedback innerhalb der Klasse einzuholen.

4. Persönliche Erfahrung

Als Lehrerin am BG/BRG Klosterneuburg unterrichte ich sowohl reguläre Gymnasial- und Realgymnasialklassen als auch IB-Klassen. Der Unterricht in diesen Klassen unterscheidet sich grundlegend. Das liegt nicht nur an der Unterrichtssprache Englisch oder dem Verfassen einer mathematischen Arbeit, sondern auch an der Art und Weise, wie mit den Schülerinnen und Schülern gearbeitet wird.

Immerhin müssen zwei verschiedene Lehrpläne kombiniert werden. Noch dazu muss die achte Klasse mit Anfang Dezember abgeschlossen sein. Bis dahin kann es manchmal etwas stressig werden. Die Jugendlichen müssen viel selbständig üben und vertiefen, damit alles ausreichend abgedeckt wird. Hier sollte aber auch berücksichtigt werden, dass die Schülerinnen und Schüler sich im Wissen, dass es gelegentlich fordernd sein kann, für diesen Zweig entscheiden. Dadurch sind viele von ihnen auch empfänglicher und williger, etwas mehr zu tun. Andererseits muss aber auch bedacht werden, dass die Jugendlichen besonders in der siebten und achten Klasse oft sehr viel auf einmal zu tun haben. Dann kommt es gelegentlich vor, dass manch einer oder eine nicht mehr so belastbar und aufnahmefähig ist. Hier bedarf es aufmerksamer Lehrkräfte mit Feingefühl.

Nachdem die beiden Lehrpläne relativ ähnlich sind (siehe Lehrplan), kann ich die Lerninhalte meist gut vereinen. Oft geht das Math-AA mehr in die Tiefe, unter anderem weil die Schülerinnen und Schüler auch ohne Taschenrechner arbeiten können müssen. Von diesen Fertigkeiten profitieren die Jugendlichen auch für die Inhalte der SRP-M. Daher unterrichte ich meistens nach dem Math-AA-Lehrplan und ergänze dann den österreichischen Stoff sowie deutsche Fachbegriffe. Aus eigener Erfahrung kann ich sagen, dass unsere Schülerinnen und Schüler aus der KIS sehr gut auf die SRP-M vorbereitet sind. Die vorwiegend erfreulichen Ergebnisse unterstreichen dies.

Wir verwenden auf der KIS zwei Schulbücher: eines für die SRP-M und eines für das Math-AA. Zum Erarbeiten der Lerninhalte arbeite ich eher mit dem Math-AA-Buch. Zum Abschluss eines Kapitels nehmen wir dann das österreichische Schulbuch und trainieren das österreichische Prüfungsformat. Erfahrungsgemäß dauert es länger, bis sich die Schülerinnen und Schüler an die Aufgabenformate der SRP-M gewöhnt haben als an jene des Math-AA. Damit diese von Anfang an ausgiebig geübt wird, unterrichte ich in der fünften Klasse größtenteils mit dem österreichischen Schulbuch. Dort bietet es sich ohnehin besonders an, weil viele Inhalte der fünften Klasse nicht im Math-AA geprüft werden.

Natürlich werden die beiden unterschiedlichen Prüfungsformate auch regelmäßig bei den österreichischen Schularbeiten und IB-Tests trainiert. Die beiden Prüfungen werden jeweils zeitnah zueinander geschrieben, denn es werden ähnliche Lerninhalte abgeprüft. Interessanterweise erzielen die Schülerinnen und Schüler bei der österreichischen Schularbeit oft mehr Punkte als beim entsprechenden IB-Test.

Eventuell liegt es daran, dass in den Tagen vor den Tests häufig nicht viel Zeit zum Üben der beiden Aufgabenformate vorhanden ist. Weil die österreichische Schularbeit mehr zur Jahresnote zählt als der IB-Test, und weil die Jugendlichen auch mehr Unsicherheiten beim österreichischen Frageformat zeigen, konzentrieren sie sich beim Lernen vermutlich auf die Schularbeit. Dann bleibt für die Besonderheiten des IB-Tests nicht mehr viel Zeit. Dann haben sie Probleme beim händischen Lösen von Aufgaben und Math-AA-spezifischen Inhalten. Dort müssen sie oft mehr argumentieren und beweisen als bei der SRP-M. Ohne der entsprechenden Übung fällt ihnen das schwer.

Weil die SRP-M aber schon im Jänner der achten Klasse geschrieben wird, ist mir auch als Lehrperson wichtiger, dass sie die Eigenheiten des österreichischen Systems zuerst beherrschen. Ab Februar widmen wir uns dann nur noch dem Math-AA. Dann werden diese Aufgabenformate ausgiebig trainiert und die reinen Math-AA-Lerninhalte wiederholt und gefestigt. Dann schneiden sie auch bei den IBDP Prüfungen oft überdurchschnittlich gut ab.

Im Gespräch mit meinen Schülerinnen und Schülern kristallisiert sich meistens heraus, dass ihnen im Vergleich die Fragestellungen des Math-AA eher zusagen. Sie meinen dort schneller zu verstehen, was von ihnen verlangt ist. Auch ich habe das Gefühl, dass die Aufgabenstellungen dort geradliniger und klarer sind. Die Jugendlichen können sich gut auf die einzelnen Fragen einlassen, weil sie dort eher innerhalb eines Themengebiets bleiben und die Teilaufgaben aufeinander aufbauen. Außerdem hilft ihnen auch, dass sie oft mehr Punkte pro Aufgabe bekommen und ihren Arbeitsprozess dokumentieren müssen. Mir persönlich gefällt die Math-AA Prüfung insofern gut, weil die Kandidatinnen und Kandidaten dort ihr umfassendes Verständnis der Materie beweisen können.

Aber der größte Unterschied zwischen dem Math-AA und der SRP-M ist wahrscheinlich die Exploration. Die Idee dahinter finde ich sehr gut: Die Schülerinnen und Schüler dürfen in ihrem eigenen Tempo ein eigenes Thema bearbeiten, das sie wirklich interessiert. Leider habe ich aber die Erfahrung gemacht, dass dies vielen nicht leichtfällt. Schon beim Finden einer realistisch bearbeitbaren Fragestellung treten die ersten Probleme auf. Die Betreuung ist auch eher schwierig, weil im Unterricht selbst nicht viel Zeit dafür bleibt. Der Großteil der Kommunikation findet hier in Pausen oder per E-Mail statt. Manche lassen sich aber von diesem selbständigen Arbeiten und Forschen derartig motivieren, dass sie eine hervorragende Arbeit schreiben. Persönlich finde ich es gut, dass die Abschlussnote nicht nur von einer punktuellen Leistung abhängt, sondern auch von einem langfristigen Arbeitsprozess. Schlussendlich kann die Exploration zwischen zwei Noten entscheiden.

Schlussendlich muss ich zugeben: Man kann nicht sagen, welches System „besser“ ist. Denn keines ist perfekt. Meiner Meinung nach funktioniert die Kombination der beiden Lehrpläne sehr gut. Für mich stehen sie weniger in Konkurrenz als dass sie sich ergänzen und vervollständigen. Die Aufgabe von uns Lehrenden ist es schließlich das beste aus beiden Systemen zu holen und damit den Jugendlichen einen umfangreichen Einblick in die Welt der Mathematik zu geben.

5. Abkürzungsverzeichnis

CAS	*… Computer Algebra System*
IBDP	*… International Baccelaureate Diploma Programme*
IBO	*… International Baccelaureate Organisation*
KIS	*… Klosterneuburg International School*
Math-AA	*… Mathematics Analysis & Approaches Standard Level*
SRP-M	*… Standardisierte Reifeprüfung in Mathematik*

6. Quellenverzeichnis

Gymnasium Klosterneuburg. (2020). *International Baccalaureate*. Von https://bgklosterneuburg.ac.at/en/about-us/academics/international-baccalaureate abgerufen

International Baccelaureate Organisation. (2019). *IBDP Subject Brief. Mathematics: Analysis & Approaches.* Von https://www.ibo.org/contentassets/5895a05412144fe890312bad52b17044/subject-brief-dp-math-analysis-and-approaches-en.pdf abgerufen

International Baccelaureate Organisation. (2019). Mathematicas: analysis and approaches guide.

International Baccelaureate Organisation. (2019). Specimen Papers. Mathematics: Analysis & Approaches.

Kontakt für etwaige Rückfragen:

Mag. Valerie Schroll

valerie.schroll@bildung.gv.at

7. Anhang

LEHRPLAN – Mathematics: Analysis and Approaches Standard Level

Wird auch in der SRP geprüft
Wird nur im IBDP geprüft

Topic 1: Number and Algebra

SL 1.1: Scientific notation

- Operations with numbers in the form $a \cdot 10^k$ where $1 \leq a < 10$ and $k \in \mathbb{Z}$.

SL 1.2: Arithmetic sequences and series

- Arithmetic sequences and series
- Use the formula for the n^{th} term and the sum of the first n terms of the sequence.
- Use the sigma notation for sums of arithmetic sequences.
- Applications (e.g. simple interest over a number of years)
- Analysis, interpretation and prediction where a model is not perfectly arithmetic in real life. (approximate common differences)

SL 1.3: Geometric sequences and series

- Geometric sequences and series.
- Use the formula for the n^{th} term and the sum of the first n terms of the sequence.
- Use the sigma notation for sums of geometric sequences.
- Applications (e.g. spread of disease, salary increase and decrease, population growth)

SL 1.4: Financial applications

- Financial application of geometric sequences and series:
  - Compound interest (yearly, half-yearly, quarterly, monthly)
  - Annual depreciation
  - Calculate the real value of an investment with an interest rate and an inflation rate.

SL 1.5: Exponents and logarithms

- Laws of exponents with integer exponents.
- Introduction to logarithms with base 10 and e.
- Numerical evaluation of logarithms using technology.
- Awareness that $a^x = b$ is equivalent to $\log_a b = x$, that $b > 0$, and $\log_e x = \ln x$.

SL 1.6: Simple proof

- Simple deductive proof, numerical and algebraic; how to lay out a left-hand side to right-hand side (LHS to RHS) proof.
- The symbols and notation for equality and identity.

SL 1.7: Exponents and logarithms

- Laws of exponents with rational exponents.

$a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}$, if a is even this refers to the positive root

- Laws of logarithms:

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$
$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$
$$\log_a x^m = m \cdot \log_a x$$

for $a, x, y > 0$

- Change of base of a logarithm

$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$, for $a, b, x > 0$

- Solving exponential equations, including using logarithms.

SL 1.8: Infinite geometric series

- Sum of infinite convergent geometric sequences.
- Use of $|r| < 1$ and modulus notation.

SL 1.9: Binomial Theorem

- The binomial theorem: expansion of $(a + b)^n, n \in \mathbb{N}$.
- Use of Pascal's triangle and ${}^nC_r$.

Topic 2: Functions

SL 2.1: Lines, parallel, perpendicular

- Different forms of the equation of a straight line
  $y = mx + c$ (gradient intercept form)
  $ax + by + d = 0$ (general form)
  $y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$ (point-gradient form)
- Gradient; intercepts.
- Lines with gradients m_1 and m_2.
- Parallel lines $m_1 = m_2$
- Perpendicular lines $m_1 \cdot m_2 = -1$
- Application (e.g. calculate gradients of inclines such as mountain roads, bridges, etc.)

SL 2.2: Function notation, domain, range, graph, informal inverse

- Concept of a function, domain, range and graph
- Function notation, for example $f(x), v(t), C(n)$.
- The concept of a function as a mathematical model
- Informal concept that an inverse function reverses or undoes the effect of a function.
- Inverse function as a reflection in the line $y = x$, and the notation $f^{-1}(x)$
  (Students should be aware that the inverse functions exist for one to one functions; the domain of $f^{-1}(x)$ is equal to the range of $f(x)$.)

SL 2.3: Graphs

- The graph of a function; its equation $y = f(x)$.
  (Difference between command terms "draw" and "sketch".)

- Creating a sketch from information given or a context, including transferring a graph from screen to paper.
  (All axes and key features should be labelled.)
- Using technology to graph functions including their sums and differences.
  (This may include functions not specifically mentioned in topic 2.)

SL 2.4: Key features of graphs

- Determine key features of graphs: maximum and minimum values; intercepts; symmetry; vertex; zeros of function or roots of equations; vertical and horizontal asymptotes using graphing technology.
- Finding the point of intersection of two curves or lines using technology.

SL 2.5: Inverse, composite, identity functions

- Composite functions: $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$
- Identity function.
- $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$
- Finding the inverse function $f^{-1}(x)$
- The existence of an inverse for one-to-one functions.

SL 2.6: Quadratic functions

- The quadratic function $f(x) = ax^2 + bx + c$: its graph, y-intercept (0, c). Axis of symmetry.
- The form $f(x) = a(x-p)(x-q)$, x-intercepts (p,0) and (q,0)
- The form $f(x) = a(x-h)^2 + k$, vertex (h,k)
- A quadratic graph is also called a parabola
- Candidates are expected to be able to change from on form to another.

SL 2.7: Quadratic equations

- Solution of quadratic equations and inequalities: using factorization, completing the square (vertex form), and the quadratic formula
- The quadratic formula
- The discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ and the nature of the roots, that is, two distinct real roots, two equal real roots, no real roots.

SL 2.8: Reciprocal, rational, asymptotes

- The reciprocal function $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$: its graph and self-inverse nature.
- Rational functions of the form $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ and their graphs.
- Sketches should include all horizontal and vertical asymptotes and any intercepts with the axes.
- Equations of vertical and horizontal asymptotes:
  Vertical asymptote: $x = -\frac{d}{c}$
  Horizontal asymptote: y= $\frac{a}{c}$

SL 2.9: Exponential and logarithmic functions

- Exponential functions and their graphs:

$$f(x) = a^x, a > 0, f(x) = e^x$$

- Logarithmic functions and their graphs:
$$f(x) = \log_a x\,, x > 0, f(x) = \ln x\,, x > 0$$
- Relationship between these functions:
$$a^x = e^{x \cdot \ln a}; \log_a a^x = x, \qquad a, x > 0, a \neq 1$$
Exponential and logarithmic functions as inverses of each other.

SL 2.10: Solving equations – graphically and analytically

- Solving equations, both graphically and analytically
- Use of technology to solve a variety of equations, including those where there is no appropriate analytic approach.
- Application of graphing skills and solving equations that relate to real-life situations.

SL 2.11: Transformations of graphs, composite (no module)

- Transformations of graphs.
- Translations: $y = f(x) + b;\ y = f(x - a)$
- Reflections (in both axes): $y = -f(x); y = f(-x)$
- Vertical stretch with scale factor p: $y = p \cdot f(x)$
- Horizontal stretch with scale factor $\frac{1}{q}$: $y = f(q \cdot x)$
- Students should be aware of the relevance of the order in which transformations are performed.
- Dynamic graphing packages could be used to investigate these transformations.
- Composite transformations.
- Not required: transformations of the form $f(ax + b)$

Topic 3: Geometry and Trigonometry

SL 3.1: Geometry

- The distance between two points in three-dimensional space, and their midpoint.
- Volume and surface area of three-dimensional solids including right-pyramid, right cone, sphere, hemisphere and combinations of these solids.
- The size of an angle between to intersecting lines of between a line and a plane.
- Only right-angled trigonometry questions will be set in reference to three-dimensional shapes.
- In problems related to these topics, students should be able to identify relevant right-angled triangles in three-dimensional objects and use them to find unknown lengths and angles.

SL 3.2: Trigonometric ratios and use in triangles

- Use sine, cosine and tangent rations to find the sides and angles of right-angled triangles.
- The sine rule: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$
- The cosine rule: $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C\,; \cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$
- Area of a triangle as $\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin C$.
- In all areas of this topic, students should be encouraged to sketch well-labelled diagrams to support their solutions.

SL 3.3: Applications

- Applications of right and non-right angled trigonometry, including Pythagoras's theorem.
- Angles of elevation and depression.

- Construction of labelled diagrams from written statements.
- Contexts may include use of bearings.

SL 3.4: Circles

- Radian measures of angles (exact multiples of π of decimals)
- Length of an arc
- Area of a sector

SL 3.5: Unit circle, ambiguous case

- Definition of $\cos\theta$, $\sin\theta$ in terms of the unit circle.
  Includes the relationship between angles in different quadrants.
- Definition of $\tan\theta$ as $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$
- The equation of a straight line through the origin is $y = x \cdot \tan\theta$, where θ is the angle formed between the line and the positive x-axis.
- Exact values of $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ and their multiples.
- Extensions of the sine rule to the ambiguous case.

SL 3.6: Trigonometric identities, double angle

- The Pythagorean identity $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.
- Double angle identities for sine and cosine.
- Simple geometrical diagrams and dynamic graphing packages may be used to illustrate the double angle identities (and other trigonometric identities).
- The relationship between trigonometric ratios.

SL 3.7: Trigonometric functions and transformations

- The circular functions $\sin x$, $\cos x$, and $\tan x$: amplitude, their periodic nature, and their graphs
- Composite functions of the form $f(x) = a \cdot \sin\big(b(x + c)\big) + d$
- Trigonometric functions may have domains given in degrees or radians.
- Transformations
- Real-life contexts
- Students should be aware that not all regression technology produces trigonometric functions in the form $f(x) = a \cdot \sin\big(b(x + c)\big) + d$.

SL 3.8: Trigonometric equations

- Solving trigonometric equations in a finite interval, both graphically and analytically.
- Equations leading to quadratic equations in $\sin x$, $\cos x$, or $\tan x$.
- Not required: general solution of trigonometric equations.

Topic 4: Statistics and Probability

SL 4.1: Working with data

- Concepts of population, sample, random sample, discrete and continuous data.
  This is designed to cover the key questions that students should ask when they see a data set/analysis.
- Reliability of data sources and bias in sampling.

- Dealing with missing data, errors in the recording of data.
- Interpretation of outliers (= a data item which is more than $1.5 \cdot IQR$ from the nearest quartile).
- Awareness that, in context, some outliers are a valid part of the sample, but some outlying data items may be an error in the sample.
- Sampling techniques and their effectiveness: simple random, convenience, systematic, quota and stratified sampling methods.

SL 4.2: Presentations of data

- Presentation of data (discrete and continuous): frequency distributions (tables).
  (Class intervals will be given as inequalities, without gaps)
- Histograms. Frequency histograms with equal class intervals. (no frequency density histograms)
- Cumulative frequency; cumulative frequency graphs; use to find median, quartiles, percentiles, range and interquartile range (IQR).
- Production and understanding of box and whisker diagrams.
- Use of box and whisker diagrams to compare two distributions, using symmetry, median, interquartile range or range. Outliers should be indicated with a cross.
- Determining whether the data may be normally distributed by consideration of the symmetry of the box and whiskers.

SL 4.3: Measures of central tendency and dispersion

- Measures of central tendency (mean, median and mode).
  (Calculation of mean using formula and technology.)
- Estimation of mean from grouped data.
  (Students should use mid-interval values to estimate the mean of grouped data.)
- Modal class (for equal class intervals only).
- Measures of dispersion (interquartile range, standard deviation and variance).
  (Calculation of standard deviation and variance of the sample using only technology, however hand calculations may enhance understanding.)
- Variance is the square of the standard deviation.
- Effect of constant changes on the original data.
- Quartiles of discrete data.
  (Using technology. Awareness that different methods for finding quartiles exist and therefore the values obtained using technology and by hand may differ.)

SL 4.4: Linear correlation

- Linear correlation of bivariate data.
- Pearson's product-moment correlation coefficient r.
  (Technology should be used to calculate r. However, hand calculations of r may enhance understanding.)
  (Critical values of r will be given where appropriate.)
- Students should be aware that Pearson's product moment correlation coefficient (r) is only meaningful for linear relationships.
- Scatter diagrams; lines of best fit, by eye, passing through the mean point
- Positive, zero, negative, strong, weak, no correlation
- Students should be able to make the distinction between correlation and causation and know that correlation does not imply causation.

- Equation of the regression line of y on x. (using technology)
- Use the equation of the regression line for prediction purposes.
- Students should be aware of the dangers of extrapolation.
- Students should be aware that they cannot always reliably make a prediction of x from a value of y, when using a y on x line.
- Interpret the meaning of the parameters, a and b, in a linear regression $y = ax + b$

SL 4.5: Probability

- Concepts of trial, outcome, equally likely outcomes, relative frequency, sample space (U) and event.
  Sample spaces can be represented in many ways, for example as a table or a list.
  Experiments using coins, dice, cards and so on, can enhance understanding of the distinction between experimental (relative frequency) and theoretical probability.
  Simulations may be used to enhance this topic.
- The probability of an event A is $P(A) = \frac{m(A)}{m(U)}$.
- The complementary events A and A' (not A).
- Expected number of occurrences.

SL 4.6: Calculate with probabilities

- Use of Venn diagrams, tree diagrams, sample space diagrams and tables of outcomes to calculate probabilities
- Combined events: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- Mutually exclusive events: $P(A \cap B) = 0$
- The non-exclusivity of "or".
- Conditional probability $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
  An alternate form of this is: $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$
- Problems can be solved with the aid of a Venn diagram, tree diagram, sample space diagram or table of outcomes without explicit use of formulae.
- Probabilities with and without replacement.
- Independent Events: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

SL 4.7: Discrete random variable

- Concept of discrete random variables and their probability distributions.
- Probability distributions will be given in the following ways:

X	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0.1	0.2	0.15	0.05	0.5

  $P(X = x) = \frac{1}{18}(4 + x)$ for $x \in \{1,2,3\}$
- Expected value (mean) for discrete data.
- Applications
- $E(X) = 0$ indicates a fair game where X represents the gain of a player.

SL 4.8: Binomial distribution

- Binomial distribution.
- Mean and variance of the binomial distribution.

- Situations where the binomial distribution is an appropriate model.
- In examinations, binomial probabilities should be found using available technology.
- Not required: formal proof of mean and variance.

SL 4.9: Normal distribution

- Normal distribution and curve.
- Properties of the normal distribution.
- Diagrammatic representation.
- Awareness of the natural occurrence of the normal distribution.
- Students should be aware that approximately 68% of the data lies between $\mu \pm \sigma$; 95% lies between $\mu \pm 2\sigma$ and 99,7% of data lies between $\mu \pm 3\sigma$.
- Normal probability calculations.
- Probabilities and values of the variable must be found using technology.
- Inverse normal calculations.
- For inverse normal calculations mean and standard deviation will be given.
- This does not involve transformation to the standardized normal variable z.

SL 4.10: Regression line of x on y

- Equation of the regression line of x on y.
- Use of the equation for prediction purposes.
- Students should be aware that they cannot always reliably make a prediction of y from a value of x, when using an x on y line.

SL 4.11: Formal conditional probability

- Formal definition and use of the formulae: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ for conditional probabilities, and $P(A|B) = P(A) = P(A|B')$ for independent events.
- An alternate form of this is: $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$.
- Testing for independence.

SL 4.12: Z-variable in normal distribution

- Standardization of normal variables (z-values).
- Probabilities and values of the variable must be found using technology.
- The standardized value (z) gives the number of standard deviations from the mean.
- Inverse normal calculations where mean and standard deviation are unknown.
- Use of z-values to calculate unknown means and standard deviations.

Topic 5: Calculus

SL 5.1: Derivatives and notation

- Introduction to the concept of a limit
- Estimation of the value of a limit from a table or graph
- Not required: formal analytic methods of calculating limits
- Derivative interpreted as gradient function and as rate of change
- Forms of notation: $\frac{dy}{dx}, f'(x), \frac{dV}{dr}$ or $\frac{ds}{dt}$ for the first derivative.
- Informal understanding of the gradient of a curve as a limit.

SL 5.2: Increasing and decreasing functions

- Increasing and decreasing functions.
- Graphical interpretation of $f'(x) > 0, f'(x) = 0, f'(x) < 0$
- Identifying intervals on which functions are increasing ($f'(x) > 0$) or decreasing ($f'(x) < 0$).

SL 5.3: Power rule and polynomial derivatives

- Derivative of $f(x) = a \cdot x^n$ is $f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1}, n \in \mathbb{Z}$.
- The derivative of functions of the form $f(x) = a \cdot x^n + b \cdot x^{n-1} + \cdots$ where all exponents are integers.

SL 5.4: Tangents and normals

- Tangents and normals at a given point, and their equations.
- Use of both analytic approaches and technology.

SL 5.5: Integration as antidifferentiation (power rule)

- Introduction to integration as anti-differentiation of functions of the form $f(x) = a \cdot x^n + b \cdot x^{n-1} + \cdots, n \in \mathbb{Z}, n \neq -1$
- Students should be aware of the link between anti-derivatives, definite integrals and area.
- Anti-differentiation with a boundary condition to determine the constant term.
- Definite integrals using technology.
- Area of a region enclosed by a curve $y = f(x)$ and the x-axis, where $f(x) > 0$.
- Students are expected to first write a correct expression before calculating the area.
- This use of dynamic geometry or graphing software is encouraged in the development of this concept.

SL 5.6: Derivatives of all functions, chain, product and quotient rules

- Derivative of x^n ($n \in \mathbb{Q}$), $\sin x$, $\cos x$, e^x and $\ln x$.
- Differentiation of a sum and a multiple of these functions.
- The chain rule for composite function.
- The product and quotient rules.

SL 5.7: Second derivative. Graphical differentiation.

- The second derivative: Use both forms of notations, $\frac{d^2y}{dx^2}$ and $f''(x)$.
- Graphical behavior of functions, including the relationship between the graphs of f, f' and f''.
- Technology can be used to explore graphs and calculate the derivatives of functions.

SL 5.8: Maximum and minimum points

- Local maximum and minimum points.
- Testing for maximum and minimum.
- Using change of sign of the first derivative or using sign of the second derivative where $f''(x) > 0$ implies a minimum and $f''(x) < 0$ implies a maximum.
- Optimization: Examples of optimization may include profit, area and volume.
- Points of inflexion with zero and non-zero gradients.
- At a point of inflexion, $f''(x) = 0$ **and** changes sign (concavity change), for example $f''(x) = 0$ is not a sufficient condition for a point of inflexion for $y = x^4$ at (0,0)

- Use of terms “concave-up” for $f''(x) > 0$, and “concave-down” for $f''(x) < 0$.

SL 5.9: Kinematics

- Kinematic problems involving displacement s, velocity v, acceleration a and total distance travelled.
- $v = \frac{ds}{dt}$, $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$
- Displacement from t_1 to t_2 is given by $\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$
- Distance from t_1 to t_2 is given by $\int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\,dt$
- Speed is the magnitude of velocity.

SL 5.10: Indefinite integration, including substitution

- Indefinite integral x^n ($n \in \mathbb{Q}$), $\sin x$, $\cos x$, $\frac{1}{x}$ and e^x.
- $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$
- The composites of any of these with the linear function $ax + b$.
- Integration by inspection (reverse chain rule) or by substitution for expressions of the form $\int k \cdot g'(x) \cdot f(g(x))\,dx$

SL 5.11: Definite integrals, areas

- Definite integrals, including analytical approach.
- $\int_a^b g'(t)\,dt = g(b) - g(a)$
- The value of some definite integrals can only be found using technology.
- Areas of a region enclosed by a curve $y = f(x)$ and the x-axis, where $f(x)$ can be positive or negative, without the use of technology.
- Students are expected to first write a correct expression before calculating the area.
- Areas between curves.
- Technology may be used to enhance understanding of the relationship between integrals and areas.